

Интервальное оценивание

1°. Доверительные интервалы. Будем рассматривать случай одномерного параметра.

Определение 1. Доверительным интервалом с коэффициентом доверия $0 \leq \alpha \leq 1$ называется совокупность двух статистик $(T_1(X), T_2(X))$ таких, что

- 1) $\forall \theta \Rightarrow T_1(X) \leq T_2(X)$ почти всюду,
- 2) $\forall \theta \Rightarrow \mathbf{P}_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \alpha$.

При таком определении точность оценивания есть длина интервала, а надёжность — вероятность попадания параметра в этот интервал. Логично, что нужно стремиться к тому, чтобы длина интервала была как можно меньше, а вероятность попадания в него как можно больше. Но эти требования противоречивы. Мы будем строить доверительные интервалы фиксируя α и стремясь получить как можно меньшую длину интервала. Во втором пункте определения доверительного интервала вероятность того, что он содержит в себе значение параметра задается в виде неравенства. Это приходится делать потому, что в случае, когда наблюдения являются дискретными с.в. равенство в пункте 2) может для некоторых α не выполняться. В этом случае значение α увеличивается до тех пор, пока не будет равенства. В дальнейшем мы всегда будем писать в этой ситуации равенство, предполагая, что в случае необходимости α уже увеличено до необходимого для выполнения равенства значения.

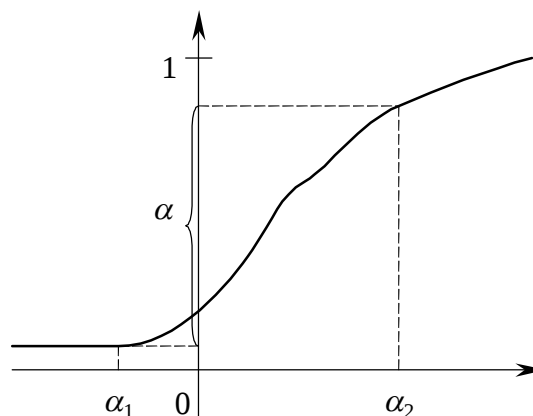
2°. Метод центральной статистики. Первый метод можно применять Только в том случае, когда выборка $X_1, \dots, X_n$, имеет непрерывную по x функцию распределения $F(x, \theta)$.

Определение 2. Функция $G(X, \theta)$ называется *центральной статистикой*, если

- 1) $G(X, \theta)$ непрерывна и строго монотонна по θ при любом фиксированном X и
- 2) $\mathbf{P}_\theta(G(X, \theta) < t) = F(t)$ — непрерывна и не зависит от θ .

Формально определённая величина не является статистикой, так как зависит от неизвестного параметра θ , однако термин «центральная статистика» употребляется именно к определённым выше объектам. При помощи центральной статистики доверительный интервал строится по следующему плану:

1. Находим $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ такие, что $\mathbf{P}_\theta(\alpha_1 \leq G_1(X, \theta) \leq \alpha_2) = \alpha \forall \theta \Leftrightarrow F(\alpha_2) - F(\alpha_1) = \alpha$. Выбор α_1, α_2 обычно не является единственным. Это можно использовать при построении самого короткого интервала:



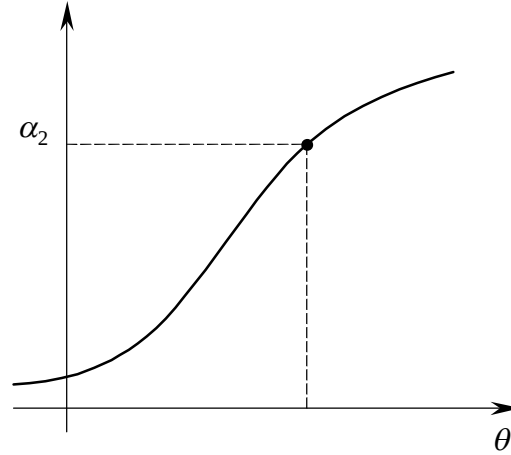
2. Пусть, например, $G(X, \theta)$ возрастает (случай убывания совершенно аналогичен). Из условий

$$\begin{cases} G(X, \theta) \leq \alpha_2, \\ G(X, \theta) \geq \alpha_1 \end{cases}$$

находятся статистики

$$\begin{cases} T_2(X): G(X, T_2(X)) = \alpha_2, \\ T_1(X): G(X, T_1(X)) = \alpha_1, \end{cases} \Leftrightarrow T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X),$$

откуда $\mathbf{P}_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \alpha \forall \theta$.



Пример. $X_1, \dots, X_n \sim U([0, \theta])$, $\theta > 0$, $0 < \alpha < 1$,

$$G(X, \theta) = \frac{\max_i X_i}{\theta}.$$

1) Очевидно, $G(X, \theta)$ для любого фиксированного X непрерывная и монотонно убывающая функция.

$$2) X_i \sim U([0, \theta]) \Rightarrow \frac{X_i}{\theta} \sim U([0, 1]).$$

$$\frac{\max X_i}{\theta} = \max\left(\frac{X_1}{\theta}, \dots, \frac{X_n}{\theta}\right) \Rightarrow F(t) = \mathbf{P}_\theta\left(\frac{\max X_i}{\theta} < t\right) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^n, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

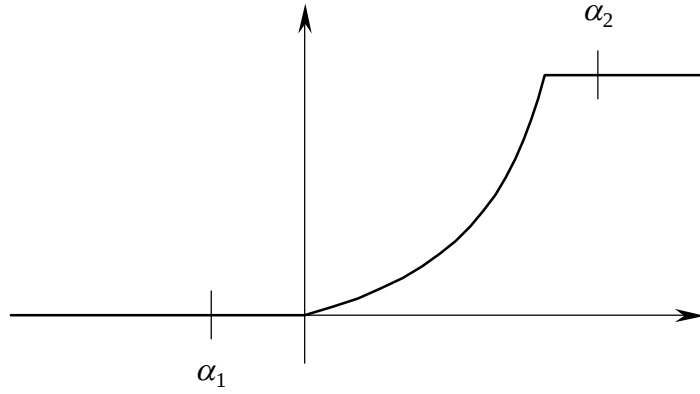
Построим доверительный интервал по указанному алгоритму:

1. Выбираем α_1 и α_2 такие, что $\mathbf{P}_\theta(\alpha_1 \leq G_1(X, \theta) \leq \alpha_2) = \alpha \Leftrightarrow F(\alpha_2) - F(\alpha_1) = \alpha$, то есть

$$\alpha_2^n - \alpha_1^n = \alpha, \quad \alpha_1 \leq \frac{\max X_i}{\theta} \leq \alpha_2, \quad \theta > 0,$$

$$\mathbf{P}_\theta\left(\frac{\max X_i}{\alpha_2} \leq \theta \leq \frac{\max X_i}{\alpha_1}\right) = \alpha \Rightarrow T_1(X) = \frac{\max X_i}{\alpha_2}, T_2(X) = \frac{\max X_i}{\alpha_1}.$$

2. Имеем $\alpha_2^n - \alpha_1^n = \alpha$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, при этом требуется, чтобы разность $T_1(X) - T_2(X)$ была минимальной. Разность $\max X_i \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right)$ минимальна, если $\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right)$ минимально.



Из условия $\alpha_2^n - \alpha_1^n = \alpha \Rightarrow \alpha_2 = \sqrt[n]{\alpha_1^n + \alpha} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha_1 \leq \sqrt[n]{1-\alpha}$, откуда следует, что достаточно найти

$$\min_{0 \leq \alpha_1 \leq \sqrt[n]{1-\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_1^n + \alpha}} \right),$$

который достигается при $\alpha_1 = \sqrt[n]{1-\alpha}$. При этом $\alpha_2 = 1$. Таким образом, доверительным интервалом наивысшей точности является

$$\left[\max X_i, \frac{\max X_i}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \right].$$

Определение 3. Центральным доверительным интервалом с коэффициентом доверия $0 \leq \alpha \leq 1$ называется совокупность двух статистик $(T_1(X), T_2(X))$ таких, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\theta(T_1(X) > \theta) &= \frac{1-\alpha}{2}, \\ \mathbf{P}_\theta(T_2(X) < \theta) &= \frac{1-\alpha}{2}. \end{aligned}$$

3°. Метод использования точечной оценки. Пусть $T(X)$ — точечная оценка θ . Обозначим $H(t, \theta) = \mathbf{P}_\theta(T(X) < t)$. Пусть $H(t, \theta)$ — непрерывная и строго монотонная функция θ при любом фиксированном t . В этом случае

$$\begin{cases} \mathbf{P}_\theta(T(X) > \alpha_1(\theta)) = \frac{1-\alpha}{2}, \\ \mathbf{P}_\theta(T(X) < \alpha_2(\theta)) = \frac{1-\alpha}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - H(\alpha_1(\theta), \theta) = \frac{1-\alpha}{2}, \\ H(\alpha_2(\theta), \theta) = \frac{1-\alpha}{2}. \end{cases}$$

Лемма. Если $H(t, \theta)$ возрастает по θ , то $\alpha_1(\theta)$ и $\alpha_2(\theta)$ убывают. Если же $H(t, \theta)$ убывает по θ , то $\alpha_1(\theta)$ и $\alpha_2(\theta)$ возрастают.

Доказательство. Пусть $H(t, \theta)$ возрастает. Предположим, что $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \alpha_2(\theta_1) \leq \alpha_2(\theta_2)$ и рассмотрим $\alpha_2(\theta)$, учитывая, что $H(t, \theta)$ как и всякая функция распределения, неубывает по первому аргументу:

$$\frac{1-\alpha}{2} = H(\alpha_2(\theta_1), \theta_1) < H(\alpha_2(\theta_1), \theta_2) \leq H(\alpha_2(\theta_2), \theta_2) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Из леммы следует, что для любого θ

$$\alpha_1(\theta) < T(X) \Leftrightarrow \theta > \varphi_1(T(X)) \Rightarrow \mathbf{P}_\theta(\theta > \varphi_1(T(X))) = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$\alpha_2(\theta) > T(X) \Leftrightarrow \theta < \varphi_2(T(X)) \Rightarrow \mathbf{P}_\theta(\theta < \varphi_2(T(X))) = \frac{1-\alpha}{2}, \Rightarrow \mathbf{P}_\theta \left(\underbrace{\varphi_2(T(X))}_{T_1(X)} \leq \theta \leq \underbrace{\varphi_1(T(X))}_{T_2(X)} \right) = \alpha.$$

Пример. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$, $\theta > 0$, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}(n\theta)$, точечная оценка θ

$$T(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \Rightarrow \mathbf{P}_\theta \left(\bar{X} = \frac{k}{n} \right) = e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots, n, \dots$$

$$H(t, \theta) = \mathbf{P}_\theta(\bar{X} < t) = \sum_{k: \frac{k}{n} < t} e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!},$$

$$\tau(\theta) = \sum_{k=0}^m e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} \Rightarrow \tau'(\theta) = \sum_{k=0}^m (-n) e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} + \sum_{k=1}^m e^{-n\theta} \frac{n(n\theta)^{k-1}}{(k-1)!} = -n e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^m}{m!} < 0,$$

следовательно, функция $H(t, \theta)$ убывает. Из условий

$$\begin{cases} 1 - H(\alpha_1(\theta) + 0, \theta) = \frac{1-\alpha}{2}, \\ H(\alpha_2(\theta), \theta) = \frac{1-\alpha}{2} \end{cases}$$

получаем уравнения для $\alpha_1(\theta)$ и $\alpha_2(\theta)$:

$$\begin{cases} \sum_{k < n\alpha_2(\theta)} e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \frac{1-\alpha}{2}, \\ \sum_{k \geq n\alpha_1(\theta)} e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \frac{1-\alpha}{2}, \end{cases}$$

а из условий

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta) < T(X), \\ \alpha_2(\theta) > T(X) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta < \varphi_1(T(X)), \\ \theta > \varphi_2(T(X)) \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} \alpha_1(\varphi_1(T(X))) = T(X), \\ \alpha_2(\varphi_2(T(X))) = T(X), \end{cases}$$

откуда получаем окончательные уравнения для α_1 и α_2 :

$$\begin{cases} \sum_{k < n\alpha_2(\varphi_2(T(X)))} e^{-n\varphi_2(T(X))} \frac{(n\varphi_2(T(X)))^k}{k!} = \frac{1-\alpha}{2}, \\ \sum_{k \geq n\alpha_1(\varphi_1(T(X)))} e^{-n\varphi_1(T(X))} \frac{(n\varphi_1(T(X)))^k}{k!} = \frac{1-\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k < nT(X)} e^{-n\varphi_2(T(X))} \frac{(n\varphi_2(T(X)))^k}{k!} = \frac{1-\alpha}{2}, \\ \sum_{k \geq nT(X)} e^{-n\varphi_1(T(X))} \frac{(n\varphi_1(T(X)))^k}{k!} = \frac{1-\alpha}{2}. \end{cases}$$